3 有理數與一次因式檢驗法

一次因式檢驗法是指：如果整係數多項式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \ (\text{其中}\, a_n \neq 0)$$

有一次因式 $px - q$（其中 p, q 為互質的整數且 $p \neq 0$），則整數 p, q 必須滿足

$$\begin{cases} p \mid a_n, \\ q \mid a_0. \end{cases}$$

事實上，另一種解釋是：如果最簡分數 $\dfrac{q}{p}$ 是多項式方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

的一個有理根，則必有

$$p \mid a_n,\ q \mid a_0.$$

例題 3.1　證明

$$\sqrt{5} + \sqrt{6}$$

不是有理數。

【證明】假設 $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ 是有理數且令 $x = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ ，則 x 滿足

$$\begin{aligned} x = \sqrt{5} + \sqrt{6} &\Rightarrow\ x - \sqrt{5} = \sqrt{6} \\ &\Rightarrow\ (x - \sqrt{5})^2 = 6 \\ &\Rightarrow\ x^2 - 1 = 2\sqrt{5}x \\ &\Rightarrow\ x^4 - 22x^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

由一次因式檢驗法知：有理數 x 的可能值為 $x = \pm 1$，但這與

$$x = \sqrt{5} + \sqrt{6} > 4$$

不合。所以

$$\sqrt{5}+\sqrt{6}$$

不是有理數。

例題 3.2　證明

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

不是有理數。

【證明】假設

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

是正有理數。令 $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ，則 x 滿足

$$\begin{aligned} x=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7} \Rightarrow\ & x-\sqrt{7}=\sqrt{3}+\sqrt{5} \\ \Rightarrow\ & x^2-2\sqrt{7}x+7=8+2\sqrt{15} \\ \Rightarrow\ & x^2-1=2(\sqrt{7}x+\sqrt{15}) \\ \Rightarrow\ & x^4+\cdots+1-60=8\sqrt{105}x \\ \Rightarrow\ & x^8+\cdots\cdots+59^2=0. \end{aligned}$$

由一次因式檢驗法知：正有理數 x 的可能值為 $x=\ 1,59,59^2$ ，但這與

$$59>x=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}>1$$

不合。所以

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

不是有理數。

習題 3.1　證明

$$\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}$$

不是有理數。

習題 3.2　試求滿足

$$(n-3)^3+(n-2)^3+(n-1)^3=n^3$$

是有理數 n 。

習題 3.3　證明

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

不是有理數。[1]

[1] 本習題的作法與“$\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 不是有理數”的作法不一樣，必須要有比較聰明的消去方法才可以。

習題 3.4　若有理數 a,b,c 滿足 $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$，則求 a,b,c 的值。

習題 3.5　設 p 為一給定的質數。是否有正整數 n 使得

$$\sqrt{1-\frac{1}{p^n}}$$

為有理數。

習題 3.6　若 a 是一個有理數且滿足

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+a}=\alpha\sqrt[3]{4}+\beta\sqrt[3]{2}+\gamma,$$

其中 α,β,γ 為有理數。試求 α,β,γ (用 a 表示)

習題 3.7　試化簡

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=?$$

動手玩數學

歷史學家為了推敲大數學家歐基里得的出生年份，發現在西元前 336 年時，流傳著一則很有趣的故事：那年的某一天，歐基里得造了一個整係數多項式，並興高采烈的跟旁邊的人說「我現在的年紀剛好是這個多項式方程式的一個根」。旁邊的人為了想知道歐基里得的歲數，於是將 7 及一個比 7 大的整數代入歐基里得的多項式，分別得到 77 與 85 的值。這時歐基里得笑著說“我的年紀有你代的數那麼小嗎”。你能根據這些對話推得歐基里得出生的年份嗎？

挑戰題

如果 p, q, r 是三個相異的質數且滿足

$$\begin{cases}(p-1)\mid(pqr-1)\\(q-1)\mid(pqr-1)\\(r-1)\mid(pqr-1)\end{cases}$$

則稱合成數 pqr 為卡邁克爾數。試確定所有 $r=3$ 的卡邁克爾數。

任三點不共線猜想

我們都知道，平面上的正格子點是指 x 與 y 座標均為正整數的點。假設 $N(N\geq 2)$ 是一個正整數，一個有名的猜想是說：是否可以在平面上找到 $2N$ 個正格子點使得其中每一點的 x 與 y 座標均是不超過 N 的非負整數，而且任三點都不共線。這是一個很難的猜想，當 $N\leq 26$ 時，已經被證明是正確的。（關於此猜想，讀者是否可以作出 $N=5$ 的情形）